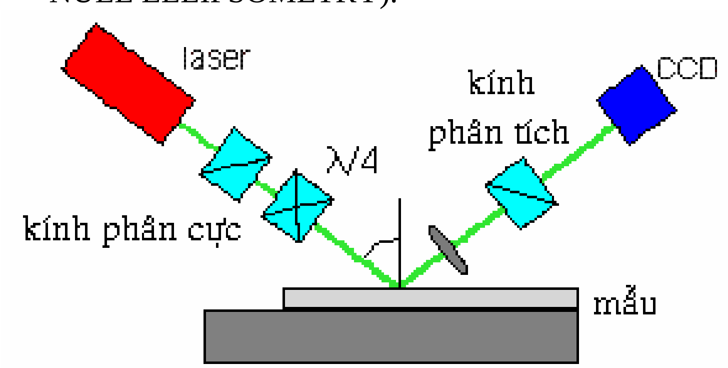
Một số bài tập:

1. Cho ánh sáng phân cực tuyến tính tạo với phương ngang góc 45^0 đi qua một tổ hợp các yếu tố quang học bao gồm một kính phân cực tuyến tính trục truyền thẳng đứng đặt trước một kính phân cực trục truyền nằm ngang. Hãy xác định trạng thái phân cực của ánh sáng ở đầu ra trong trường hợp này và trong trường hợp vị trí các yếu tố quang học bị đảo ngược lại.
2. Cho ánh sáng phân cực tuyến tính tạo với phương ngang góc 45^0 đi qua một tổ hợp các yếu tố quang học bao gồm bản ¼ sóng trục nhanh thẳng đứng đặt trước một bản ¼ sóng trục nhanh nằm ngang. Hãy xác định trạng thái phân cực của ánh sáng ở đầu ra trong trường hợp này và trong trường hợp vị trí các yếu tố quang học bị đảo ngược lại.
3. Cho một ánh sáng có trạng thái phân cực bất kì đi qua một tổ hợp các yếu tố quang học được sắp xếp theo thứ tự sau: 1) Kính phân cực tuyến tính có trục truyền tạo với trục nằm ngang một góc P. 2) Bản ¼ sóng có trục nhanh tạo với phương ngang một góc C. Sau đó, ánh sáng ở lối ra được phản xạ trên bề mặt mẫu và đến một kính phân tích a có trục truyền tạo với phương ngang góc A. Hỏi: Xác định góc A để không có ánh sáng xuất hiện phía sau a . (ĐÂY LÀ BÀI TOÁN NULL ELLIPSOMETRY).



Cần biết:

1) Nhân hai ma trận:

Giả sử ta có hai ma trận A (*m* hàng, *n* cột) và B (*k* hàng, *l* cột) như sau:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & .... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & .... & a_{2n} \\ .... & .... & .... & .... \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & .... & b_{1l} \\ b_{21} & b_{22} & .... & b_{2l} \\ .... & .... & .... & .... \\ b_{k1} & b_{k2} & ... & b_{kl} \end{bmatrix}$$

Để hai ma trận này có thể nhân được thì số cột của ma trận A phải bằng số hàng của ma trận B. Cụ thể ở đây $n=k$. Kết quả của phép nhân ma trận A (*m* hàng, *n* cột) với ma trận B (*k* hàng, *l* cột) là một ma trận C:

- Có *m* hàng, *l* cột.

- Phần tử ở hàng *i*, cột *j* của C được tính bằng cách ***lấy tuần tự lấy các phần tử ở hàng i của ma trận A nhân với các phần tử ở cột j của ma trận B và cộng các tích đó lại với nhau***.

$$B = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & .... & c_{1l} \\ c_{21} & c_{22} & .... & c_{2l} \\ .... & .... & .... & .... \\ c_{m1} & c_{m2} & ... & c_{ml} \end{bmatrix}$$

Hãy xét một số ví dụ cần thiết:

Ví dụ 1:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A.B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.0+0.0 & 1.0+0.1 \\ 0.0+0.0 & 0.0+0.1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Ví dụ 2: Cũng hai ma trận A, B như trên nhưng bây giờ ta tính B.A

$$B.A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.1+0.0 & 0.0+0.0 \\ 0.1+1.0 & 0.0+1.0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Ví dụ 3:

$$C = \begin{bmatrix} e^{i\frac{\pi}{4}} & 0 \\ 0 & -ie^{i\frac{\pi}{4}} \end{bmatrix},\ D = \begin{bmatrix} e^{i\frac{\pi}{4}} & 0 \\ 0 & ie^{i\frac{\pi}{4}} \end{bmatrix}$$

$$C.D = \begin{bmatrix} e^{i\frac{\pi}{4}} & 0 \\ 0 & -ie^{i\frac{\pi}{4}} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} e^{i\frac{\pi}{4}} & 0 \\ 0 & ie^{i\frac{\pi}{4}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{i\frac{\pi}{4}}.e^{i\frac{\pi}{4}}+0.0 & e^{i\frac{\pi}{4}}.0+0.ie^{i\frac{\pi}{4}} \\ 0.e^{i\frac{\pi}{4}}+-ie^{i\frac{\pi}{4}}.0 & 0.0+\left(-ie^{i\frac{\pi}{4}}\right)\left(ie^{i\frac{\pi}{4}}\right) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{i\frac{\pi}{2}} & 0 \\ 0 & e^{i\frac{\pi}{2}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{bmatrix}$$

Ví dụ 4: Cũng các ma trận C và D như trên nhưng thực hiện D.C

$$D.C = \begin{bmatrix} e^{i\frac{\pi}{4}} & 0 \\ 0 & ie^{i\frac{\pi}{4}} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} e^{i\frac{\pi}{4}} & 0 \\ 0 & -ie^{i\frac{\pi}{4}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{i\frac{\pi}{4}}.e^{i\frac{\pi}{4}}+0.0 & e^{i\frac{\pi}{4}}.0+0.(-ie^{i\frac{\pi}{4}}) \\ 0.e^{i\frac{\pi}{4}}+ie^{i\frac{\pi}{4}}.0 & 0.0+\left(ie^{i\frac{\pi}{4}}\right)\left(-ie^{i\frac{\pi}{4}}\right) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{i\frac{\pi}{2}} & 0 \\ 0 & e^{i\frac{\pi}{2}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{bmatrix}$$

Ví dụ 5:

$$E = \begin{bmatrix} \cos^2 C - i\sin^2 C & (1+i)\sin C\cos C \\ (1+i)\sin C\cos C & \sin^2 C - i\cos^2 C \end{bmatrix},\quad F = \begin{bmatrix} \cos^2 P & \sin P\cos P \\ \sin P\cos P & \sin^2 P \end{bmatrix}$$

$$E.F = \begin{bmatrix} \cos^2 C - i\sin^2 C & (1+i)\sin C\cos C \\ (1+i)\sin C\cos C & \sin^2 C - i\cos^2 C \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \cos^2 P & \sin P\cos P \\ \sin P\cos P & \sin^2 P \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \left(\cos^2 C - i\sin^2 C\right)\cos^2 P + [(1+i)\sin C\cos C](\sin P\cos P) & \left(\cos^2 C - i\sin^2 C\right)(\sin P\cos P) + [(1+i)\sin C\cos C]\sin^2 P \\ [(1+i)\sin C\cos C]\cos^2 P + \left(\sin^2 C - i\cos^2 C\right)(\sin P\cos P) & [(1+i)\sin C\cos C]\sin P\cos P + \left(\sin^2 C - i\cos^2 C\right)\sin^2 P \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos C\cos P\cos(P-C) + i\sin C\cos P\sin(P-C) & \sin P\cos C\cos(P-C) + i\sin P\sin C\sin(P-C) \\ \sin C\cos P\cos(P-C) - i\cos C\cos P\sin(P-C) & \sin C\sin P\cos(P-C) - i\cos C\sin P\sin(P-C) \end{bmatrix}$$

2) Nếu ánh sáng truyền liên tiếp qua *n* yếu tố quang học theo thứ tự là *1, 2, 3, ….n*, được đặc trưng tương ứng bởi các ma trận J_1, J_2, J_3, …..,J_n thì quan hệ giữa ánh sáng ở đầu ra so với ánh sáng đầu vào là:

$$\boldsymbol{E_t=(J_n.J_{n-1}\ldots\ldots J_2.J_1)E_i}$$

Nghĩa là, ở đây, chúng ta phải thực hiện nhân hai ma trận $\boldsymbol{J_2.J_1}$ trước, rồi sau đó nhân J_3 với kết quả vừa thu được, rồi lại tiếp tục nhân $\boldsymbol{J_4}$ với kết quả vừa thu được trước đó. Nói tóm lại, phép nhân được thực hiện từ phải sang trái.

Giải các bài tập

1. Vector Jones biểu dạng trạng thái phân cực của ánh sáng là:

$$\vec{E}_{45^o} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Ma trận Jones của kính phân cực tuyến tính trục truyền thẳng đứng là: $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

Ma trận Jones của kính phân cực tuyến tính trục truyền nằm ngang là: $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

Khi đặt B trước A thì ma trận Jones của tổ hợp này là:

$J = A.B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ (theo ví dụ 1)

Khi đặt A trước B thì ma trận Jones của tổ hợp mới là:

$J = B.A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ (theo ví dụ 2)

Vậy, trong cả hai trường hợp, không có ánh sáng xuất hiện ở lối ra.

2. Vector Jones biểu dạng trạng thái phân cực của ánh sáng là:

$$\vec{E}_{45^o} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Ma trận Jones của bản ¼ sóng trục nhanh thẳng đứng là: $C = \begin{bmatrix} e^{i\frac{\pi}{4}} & 0 \\ 0 & -ie^{i\frac{\pi}{4}} \end{bmatrix}$

Ma trận Jones của bản ¼ sóng với trục nhanh nằm ngang là: $D = \begin{bmatrix} e^{i\frac{\pi}{4}} & 0 \\ 0 & ie^{i\frac{\pi}{4}} \end{bmatrix}$

Khi đặt C trước D thì ma trận Jones của tổ hợp này là:

$J = D.C = \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{bmatrix}$ (theo ví dụ 4)

Ánh sáng ở đầu ra là: $\vec{E}_{out} = J.\vec{E}_{45^0} = \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} i \\ i \end{bmatrix}$

Khi đặt D trước C thì ma trận Jones của tổ hợp mới là:

$J = C.D = \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{bmatrix}$ (theo ví dụ 3)

Ánh sáng ở đầu ra có trạng thái phân cực tương tự trường hợp trên.

Đến đây ta có một nhận xét là: khi đặt hai kính phân cực tuyến tính sao cho trục truyền của chúng vuông góc nhau thì sẽ không có ánh sáng ở đầu ra, nhưng khi đặt hai bản ¼ sóng để trục nhanh của chúng vuông góc nhau thì vẫn có ánh sáng ở đầu ra.

3.Các yếu tố quang học mà ánh sáng đã đi qua theo thứ tự là:

Kính phân cực tuyến tính có trục truyền tạo với trục nằm ngang một góc P (gọi đây là yếu tố F)>>Bản ¼ sóng có trục nhanh tạo với phương ngang một góc C (yếu tố E)>>phản xạ trên bề mặt mẫu(yếu tố K)

Ma trận Jones của yếu tố F: $F = \begin{bmatrix} \cos^2 P & \sin P \cos P \\ \sin P \cos P & \sin^2 P \end{bmatrix}$

Ma trận Jones của yếu tố E: $E = \begin{bmatrix} \cos^2 C - i \sin^2 C & (1+i) \sin C \cos C \\ (1+i) \sin C \cos C & \sin^2 C - i \cos^2 C \end{bmatrix}$

Ma trận Jones của yếu tố K: $K = \begin{bmatrix} \rho & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

Ma trận Jones của hệ là:

J=K.E.F

$$E.F = \begin{bmatrix} \cos C \cos P \cos(P-C) + i \sin C \cos P \sin(P-C) & \sin P \cos C \cos(P-C) + i \sin P \sin C \sin(P-C) \\ \sin C \cos P \cos(P-C) - i \cos C \cos P \sin(P-C) & \sin C \sin P \cos(P-C) - i \cos C \sin P \sin(P-C) \end{bmatrix}$$

(***theo ví dụ 5***)

$$J = \begin{bmatrix} \rho[\cos C \cos P \cos(P-C) + i \sin C \cos P \sin(P-C)] & \rho[\sin P \cos C \cos(P-C) + i \sin P \sin C \sin(P-C)] \\ \sin C \cos P \cos(P-C) - i \cos C \cos P \sin(P-C) & \sin C \sin P \cos(P-C) - i \cos C \sin P \sin(P-C) \end{bmatrix}$$

Kết quả này chỉ giống kết quả tính toán của trong tài liệu khi:

- Chỉ các phần tử trên đường chéo chính khác 0. (???)
- Bỏ *cosP* của J_{11} và bỏ *sinP* ở J_{22}. (???)

Trong trường hợp đó:

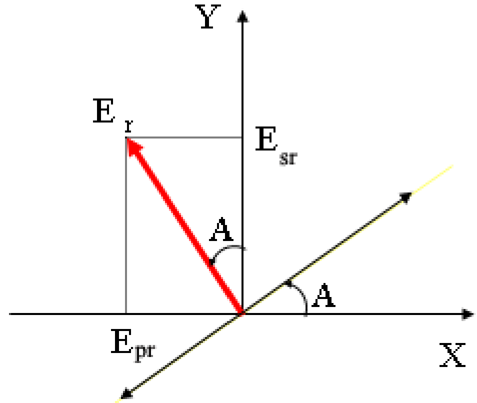
$$J = \begin{bmatrix} \rho[\cos C \cos(P-C) + i \sin C \sin(P-C)] & 0 \\ 0 & \sin C \cos(P-C) - i \cos C \sin(P-C) \end{bmatrix}$$

Giả sử vector Jones của ánh sáng ở lối vào là:

$$\begin{bmatrix} E_{pi} \\ E_{si} \end{bmatrix}$$

Và vector Jones của ánh sáng ở lối ra là:

Thắc mắc xin liên hệ: thanhlam1910_2006@yahoo.co



$$\begin{bmatrix} E_{pr} \\ E_{sr} \end{bmatrix}$$

Thì mối quan hệ giữa chúng được biểu diễn qua hệ thức:

$$\begin{bmatrix} E_{pr} \\ E_{sr} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho\left[\cos C\cos(P-C) + i\sin C\sin(P-C)\right] & 0 \\ 0 & \sin C\cos(P-C) - i\cos C\sin(P-C) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_{pi} \\ E_{si} \end{bmatrix}$$

$$E_{pr} = \rho\left[\cos C\cos(P-C) + i\sin C\sin(P-C)\right]E_{pi}$$

$$E_{sr} = \sin C\cos(P-C) - i\cos C\sin(P-C)E_{si}$$

Để không có ánh sáng xuất hiện ở đầu ra thì đầu mút của vector cường độ điện trường của ánh sáng phân cực tuyến tính phải vuông góc với trục truyền của kính phân tích a (xem hình vẽ).

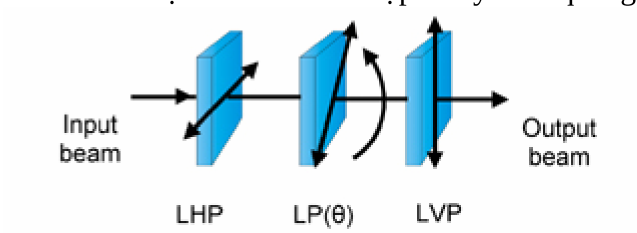
Khi đó $tgA = -\dfrac{E_{pr}}{E_{sr}} = \dfrac{-\left[\rho\cos C\cos(P-C) + i\sin C\sin(P-C)\right]E_{pi}}{\left[\sin C\cos(P-C) - i\cos C\sin(P-C)\right]E_{si}}$

Nếu chỉ xét các ánh sáng lối vào ứng với các trạng thái phân cực có $E_{pi}=E_{si}$ thì ta được:

$$tgA = -\frac{E_{pr}}{E_{sr}} = \frac{-\left[\rho\cos C\cos(P-C) + i\sin C\sin(P-C)\right]}{\left[\sin C\cos(P-C) - i\cos C\sin(P-C)\right]}$$

Vậy khi $A = artg\dfrac{-\left[\rho\cos C\cos(P-C) + i\sin C\sin(P-C)\right]}{\left[\sin C\cos(P-C) - i\cos C\sin(P-C)\right]}$ thì sẽ không có ánh sáng xuất hiện ở lối ra.

4.Tính ma trận Jones của tổ hợp các yếu tố quang học sau:



ở đây:

LHP: Kính phân cực tuyến tính trục truyền nằm ngang.

$LH(\theta)$: Kính phân cực tuyến tính có trục truyền tạo với phương ngang góc θ.

LVP: Kính phân cực tuyến tính với trục truyền thẳng đứng.

<u>Kết quả:</u>

$$\mathbf{J} = \mathbf{J}_{LVP}\cdot\mathbf{J}_{LP}(\theta)\cdot\mathbf{J}_{LHP} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \sin\theta\cos\theta & 0 \end{pmatrix}.$$